若当标准形的计算

例 1　已知

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

求可逆方阵 P 使 $P^{-1}AP = J$ 是若当标准形.

解　A 的特征多项式 $\varphi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 3)^3$, A 只有唯一的特征值 3, 重数为 3.

$A - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$, $\dim \operatorname{Ker}(A - 3I) = 3 - \operatorname{rank}(A - 3I) = 3 - 1 = 2$.

解方程组得到 $\operatorname{Ker}(A - 3I)$ 的一组基 $\{X_1, X_2\}$, 其中

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

我们有 $(A - 3I)^2 = O$, 因此 $\operatorname{Ker}(A - 3I)^2$ 就是整个 3 维列向量空间 $V = C^{3\times 1}$. 对 $\{X_1, X_2\}$ 添加 $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 得到 V 的一组基.

$Y_1 = (A - 3I)X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$ 且 $(A - 3I)Y_1 = \mathbf{0}$. Y_1 含于 $\operatorname{Ker}(A - 3I)$ 且与 X_1 线性无关，因此 $\{Y_1, X_1\}$ 是 $\operatorname{Ker}(A - 3I)$ 的一组基，可用它取代 $\{X_1, X_2\}$, 得到 V 的一组新的基 $\{Y_1, X_1, X_3\}$. 且有

$$\begin{aligned} &\mathbf{0} \leftarrow Y_1 \leftarrow X_3 \\ &\mathbf{0} \leftarrow X_1 \end{aligned}$$

其中的箭头 $\leftarrow$ 表示在 $A - 3I$ 左乘作用下的效果.

依次以 V 的基向量 Y_1, X_1, X_3 为各列组成可逆方阵 P, 写成分块形式 (Y_1, X_1, X_3) (每一列为一块). 则有

$$(A - 3I)(Y_1, X_3, X_1) = (0, Y_1, 0) = (Y_1, X_3, X_1)\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

从而

$$A(Y_1, X_3, X_1) = (Y_1, X_3, X_1)\begin{pmatrix} 3 & 1 & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}.$$

即

$$AP = P\begin{pmatrix} 3 & 1 & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}.$$

这就求出了若当标准形 J 和过渡矩阵 P.　□

2. 求若当标准形的算法

例 2 求例 1 中的方阵 A 的若当标准形 J, (不用求出过渡矩阵).

解 A 的特征多项式 $\varphi_A(\lambda)=(\lambda-3)^3$, 只有唯一的特征值 3.

求得 $\mathrm{Ker}\,(A-3I), \mathrm{Ker}\,(A-3I)$ 的维数分别为 $2,3$. 可以取 $\mathrm{Ker}\,(A-3I)$ 的一组基 $\{X_1,X_2\}$ 扩充为 $\mathrm{Ker}\,(A-3I)$ 的一组基 $\{X_1,X_2,X_3\}$. 由 A 的若当标准形和过渡矩阵的存在性，可以选择以上的基满足以下条件

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &\leftarrow X_1 \leftarrow X_3 \\ \mathbf{0} &\leftarrow X_2 \end{aligned}$$

图 1

其中的箭头 $\leftarrow$ 表示在 $A-3I$ 左乘作用下的效果. 图 1 中第一行有两个向量，对应于 2 阶若当块；第二行一个向量，对应于 1 阶若当块.

因此， J 由两个若当块组成，阶数分别为 2,1. 由此可写出

$$J=\begin{pmatrix} 3 & 1 & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

例 2 中并没有解方程组，由 $\mathrm{Ker}\,(A-3I), \mathrm{Ker}\,(A-3I)^2$ 的维数直接画出了图 1, 决定了各若当块的阶数，求出了若当标准形. 图 1 还可以进一步简化，不必写出表示各向量的字母 X_1,X_2,X_3, 也不必画出箭头，只要写出各基向量的番号就行了. 这样，图 1 就简化为如下的数表：

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & \end{bmatrix}$$

表中第一列有两个数，表示 $\mathrm{Ker}\,(A-3I)$ 的维数 2; 前两列共有 3 个数，表示 $\mathrm{Ker}\,(A-3I)^2$ 的维数 3. 每一行代表一个若当块：第一行有两个数，表示 2 阶若当块；第二行有一个数，表示 1 阶若当块.

例 3 求

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

的若当标准形 J (不用求出过渡方阵 P).

解 A 的特征多项式 $\varphi_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^5$, 特征根为 1(1 重), 2(5 重).

特征值 1 的重数为 1, 只有一个 1 阶若当块 1.

特征值 2 的重数为 5. 依次计算各 $\mathrm{Ker}\,(A-2I)^k$ $(k=1,2,\ldots)$ 的维数直到维数等于 5 为止，得到 $\mathrm{Ker}\,(A-2I), \mathrm{Ker}\,(A-2I)^2, \mathrm{Ker}\,(A-2I)^3$ 的维数分别是 2,4,5. 将正整数 1,2,3,4,5 依次从上到下填入下面的数表的各列

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & \end{bmatrix}$$

使各列的最下面的数分别是各 $\mathrm{Ker}\,(A-2I)^k$ $(k=1,2,3)$ 的维数 2,4,5. 数表的两行的长度 (所含的数的个数) 分别是 3,2. 这说明特征值 2 的若当块有两个，阶数分别为 3,2.

因此可写出 A 的若当标准形

$$J = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 2 & 1 & 0 & & \\ & & 2 & 1 & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 2 & 1 \\ & & & & & 2 \end{pmatrix}$$

3. 求过渡矩阵的算法

例 6 对例 3 中的方阵 A, 求逆复方阵 P 使 $J = P^{-1}AP$ 是若当标准形.

解 这里的 A 也就是例 3 中的 A, 在例 3 中已经求出了它的若当标准形

$$J = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & J_3(2) & \\ & & J_2(2) \end{pmatrix}$$

现在需要求出过渡矩阵 P.

对特征值 1, 解方程组 $(A-I)X = \mathbf{0}$ 求得一个基础解 $Y_1 = (1,0,0,0,0,0)^T$. 满足条件 $AY_1 = Y_1$.

对特征值 2, 我们有

$$\dim \mathrm{Ker}\,(A-2I) = 2, \dim \mathrm{Ker}\,(A-2I)^2 = 4, \dim \mathrm{Ker}\,(A-2I)^3 = 5.$$

我们希望选取 $\mathrm{Ker}\,(A-2I)$ 的一组基 $\{X_1, X_2\}$, 添加 X_3, X_4 扩充为 $\mathrm{Ker}\,(A-2I)^2$ 的基，再添加 X_5 扩充为 $\mathrm{Ker}\,(A-2I)^3$ 的基，使得在 $A-2I$ 的左乘作用下有

$$\mathbf{0} \leftarrow X_1 \leftarrow X_3 \leftarrow X_5$$
$$\mathbf{0} \leftarrow X_2 \leftarrow X_4$$

如果按照上面所说顺序先取 X_1, X_2 再扩充到 X_3, X_4 再扩充到 X_5, 很难使上面的“箭头”成立．反过来，如果先选定了 X_5 和 X_4, 就很容易按箭头图的要求得到 X_3, X_1, X_2.

X_5 满足的必要充分条件为 $(A-2I)^3X_5 = \mathbf{0} \neq (A-2I)^2X_5$. 易见

$$X_5 = (0,0,0,0,1,-2)^T$$

符合要求．再取

$$X_3 = (A-2I)X_5 = (-1,-4,3,-3,0,0)^T, \quad X_1 = (A-2I)^2X_5 = (-3,-3,0,0,0,0)^T$$

并注意到 $(A-2I)X_1 = (A-2I)^3X_5 = \mathbf{0}$, 可知在 $A-2I$ 的左乘作用下有 $\mathbf{0} \leftarrow X_1 \leftarrow X_3 \leftarrow X_5$.

易见 X_4 必须满足条件： $(A-2I)^2X_4 = \mathbf{0}$, 且 $X_2 = (A-2I)X_4$ 与 X_1 线性无关．可以证明这个条件也是充分的 (证明过程略). 对 $(A-2I)^2X = \mathbf{0}$ 的一组基础解中的向量逐个验证，发现由 $X_4 = (0,0,3,0,2,-1)^T$ 求出的 $X_2 = (4,1,3,0,0,0)^T$ 与 X_1 线性无关，符合要求.

依次以 $Y_1, X_1, X_3, X_5, X_2, X_4$ 为各列排成可逆方阵 P, 则

$$AP = PJ \qquad 从而 \qquad P^{-1}AP = J.$$

恰如所需. □